

Nom _____ Groupe _____

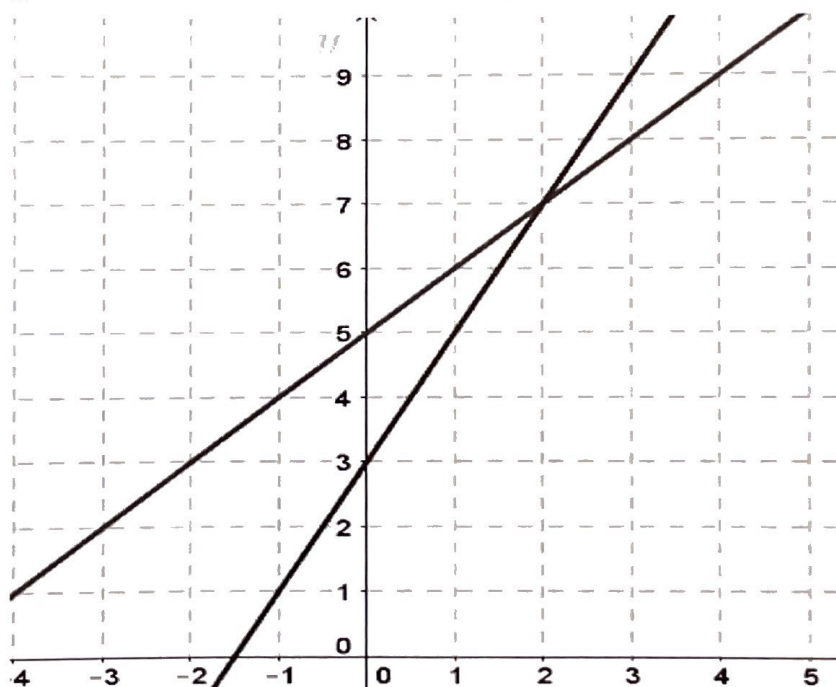
M. Zait
Corrigé

Math CST4

Notes de cours

Chapitre 1

Système d'équations



Septembre 2023

Situation où l'on étudie simultanément deux (ou plusieurs) équations à deux variables.
Voici un exemple de système d'équations : $y = x + 15$

$$x + y = -7$$

RÉSOLUTION ALGÈBRIQUE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Résoudre un système d'équations revient à trouver les valeurs des deux variables.
Nous étudierons 3 méthodes de résolution.

1ère méthode : Comparaison

Utilisée lorsqu'une même variable est isolée dans les deux équations.

$$y_1 = m_1x_1 + b_1$$

ou

$$x_1 = c_1y_1 + d_1$$

$$y_2 = m_2x_2 + b_2$$

$$x_2 = c_2y_2 + d_2$$

Étapes : 1. On veut $y_1 = y_2$ (ou $x_1 = x_2$).

Alors, on compare (égalise) les deux expressions équivalentes à y_1 et y_2 .

$$m_1x_1 + b_1 = m_2x_2 + b_2$$

2. Résoudre l'équation obtenue.

3. Trouver la valeur de l'autre variable en remplaçant celle trouvée à l'étape "2" dans l'une des deux équations de départ. On obtient ainsi, une solution (x, y) satisfaisant les deux équations.

4. Valider votre solution et donner cette solution.

Exemple : Résoudre les systèmes d'équations suivants par comparaison.

a) $y = 4x + 6$
 $y = 3x + 10$

$$\begin{array}{r} 4x + 6 = 3x + 10 \\ -3x \quad -3x \\ \hline x + 6 = 10 \\ -6 \quad -6 \\ \hline x = 4 \end{array}$$

remplacer :

$$\begin{array}{l} y = 4 \cdot 4 + 6 \\ y = 16 + 6 \\ y = 22 \end{array}$$

Solution
 $(4, 22)$

b) $x = 10y - 50$
 $x = 5y + 20$

$$\begin{array}{r} 10y - 50 = 5y + 20 \\ -5y \quad -5y \\ \hline 5y - 50 = 20 \\ +50 \quad +50 \\ \hline 5y = 70 \\ \frac{5y}{5} = \frac{70}{5} \\ y = 14 \end{array}$$

Solution
 $(90, 14)$

$$y = 14$$

remplacer :

$$\begin{array}{l} x = 10 \cdot 14 - 50 \\ x = 140 - 50 = 90 \end{array}$$

2e méthode : Substitution

Utilisée lorsqu'une variable est isolée dans l'une des deux équations.

$$x = c_1 y + d_1$$

ou

$$y = m_1 x + d_1$$

$$m x + c_2 y = d_2$$

$$m_2 x + c_2 y = d_2$$

Étapes : 1. Remplacer la variable isolée dans l'autre équation par l'expression qui lui est égale pour former une équation à une seule variable.

$$m \overbrace{(c_1 y + d_1)}^x + c_2 y = d_2$$

2. Résoudre l'équation obtenue.

3. Trouver la valeur de l'autre variable en remplaçant celle trouvée à l'étape "2" dans l'équation dont la variable est isolée. On obtient ainsi, une solution (x, y) satisfaisant les deux équations.

4. Valider votre solution et donner cette solution.

Exemple : Résoudre les systèmes d'équations suivants par substitution.

a) $y = 22 - x$
 $2x + 3y = 50$

$$\begin{aligned} 2x + 3(22 - x) &= 50 \\ 2x + 66 - 3x &= 50 \\ -x + 66 &= 50 \\ -66 \quad -66 \\ -x &= -16 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

remplacer :

$$y = 22 - 16$$

$$y = 6$$

Solution $(16, 6)$

b) $3x = y$
 $x - 2y = 20$

$$\begin{aligned} x - 2(3x) &= 20 \\ x - 6x &= 20 \\ -5x &= 20 \\ \underline{-5} \quad \underline{-5} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

remplacer :

$$y = 3 \cdot -4 = -12$$

Solution $(-4, -12)$

3^e méthode : Réduction

Utilisée lorsqu'aucune variable n'est isolée dans les deux équations.

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

- Étapes :
1. Multiplier chacune des équations par un nombre, pour former un système d'équations équivalent dans lequel les coefficients de l'une des variables sont opposés (même valeur signe contraire).
 2. Additionner les deux équations afin d'éliminer la variable ayant les coefficients opposés. On obtient une équation à une seule variable.
 3. Résoudre l'équation obtenue.
 4. Trouver la valeur de l'autre variable en remplaçant celle trouvée à l'étape "3" dans l'une des deux équations de départ. On obtient ainsi, une solution (x, y) satisfaisant les deux équations.
 5. Valider votre solution et donner cette solution.

Exemple : Résous les systèmes d'équations suivants par réduction.

a) $\begin{cases} -3x + 7y = 15 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{matrix}$

$$\begin{array}{r} 12x + 28y = 60 \\ + \quad 12x - 15y = -21 \\ \hline 13y = 39 \\ \frac{13y}{13} = \frac{39}{13} \end{array}$$

$$y = 3$$

remplacer :

$$\begin{array}{r} -3x + 7 \cdot 3 = 15 \\ -3x + 21 = 15 \\ -21 = -21 \\ -3x = -6 \\ \frac{-3x}{-3} = \frac{-6}{-3} \end{array}$$

$$x = 2$$

Solution
(2, 3)

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 50 \end{cases} \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 3x + 3y = 15 \\ + \quad 2x - 3y = 50 \\ \hline 5x = 65 \\ \frac{5x}{5} = \frac{65}{5} \end{array}$$

$$x = 13$$

remplacer :

$$\begin{array}{r} 13 + y = 5 \\ -13 \quad -13 \\ \hline y = -8 \end{array}$$

Solution (13, -8)

TRADUIRE UNE SITUATION PAR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS

- Étapes : 1. Identifier clairement les variables.
2. Trouver (écrire) deux équations reliant les variables dans la situation.

Note: traduire $\rightarrow$ modélisation algébrique

Exemple 1 :

Lysanne va au guichet automatique pour y retirer 500\$ en coupure de 20\$ et de 50\$.
En tout, Lysanne reçoit 19 billets de banque. On s'intéresse au nombre de billets de 20\$ et de 50\$ qu'elle reçoit.

A) Définis les variables associées à cette situation.

x : nombre de billets de 20\$
 y : nombre de billets de 50\$.

B) Traduis cette situation par un système d'équations.

$$\begin{aligned} 20x + 50y &= 500 \\ x + y &= 19 \end{aligned}$$

Exemple 2 :

Au marché, Lysanne achète un bouquet de 20 fleurs composé de marguerites et de lys. Il y a quatre fois plus de marguerites que de lys. Soit m , le nombre de marguerites, et l , le nombre de lys.

Traduis cette situation par un système d'équations.

$$\begin{aligned} m &= 4l \\ m + l &= 20 \end{aligned}$$

Exemple 3 :

Ensemble, Joëlle et Pierre-Antoine ont 120\$. Joëlle a 12\$ de moins que Pierre-Antoine. On s'intéresse aux avoirs de Joëlle et de Pierre-Antoine.

a) Définis les variables de cette situation.

x : avoir de Joëlle

y : avoir de Pierre-Antoine.

b) Traduis cette situation par un système d'équations.

$$x + y = 120$$

$$x = y - 12$$

Exemple 4 :

Un rectangle a un périmètre de 48 cm. Sa longueur a 2 cm de moins que le triple de sa largeur. On s'intéresse aux dimensions du rectangle.

a) Définis les variables de cette situation.

x : longueur du rectangle

y : largeur du rectangle

b) Traduis cette situation par un système d'équations.

$$2x + 2y = 48$$

$$x = 3y - 2$$

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Exemple 1: Pour entrer au cinéma Bobine, un adulte et un enfant doivent déboursier 14,50 \$. Une famille composée de deux adultes et de trois enfants doit déboursier 34 \$.

Quel est le prix d'un billet pour un adulte et le prix d'un billet pour un enfant ?

1- Définir les variables	x : prix pour un enfant. y : prix pour un adulte.
2- Écrire les équations	$(1 \cdot x + 1 \cdot y = 14,50) \cdot -2$ $3x + 2y = 34$
3- Résoudre le système	$\begin{array}{r} -2x - 2y = 29 \\ + 3x + 2y = 34 \\ \hline x = 5 \end{array}$ remplacer : $\begin{array}{r} 5 + y = 14,50 \\ -5 \quad -5 \\ \hline y = 9,50 \end{array}$
4- Réponse complète.	Le prix pour un adulte est de 9,50\$ et pour 1 enfant 5\$.

Exemple 2 : Une entreprise qui produit du jus de canneberges a deux immenses réservoirs. À un certain moment, on déverse du jus, à un débit de 65 L par minute, dans un réservoir contenant déjà 3 190 L de jus. Au même moment, on vide l'autre réservoir à un débit de 60 L par minute. Dans ce second réservoir, il y a 5 240 L de jus prêt à être embouteillé.

- Après combien de temps les deux réservoirs contiendront-ils la même quantité de jus ?
- Quelle quantité de jus contiendra alors chacun des réservoirs ?

x : nombre de minutes
 y : quantité de jus dans le réservoir.

$$y = 3190 + 65x$$

$$y = 5240 - 60x$$

$$\begin{array}{r} -3190 + 65x = 5240 - 60x \\ 3190 \quad -3190 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 65x = 2050 - 60x \\ +60x \quad +60x \end{array}$$

$$\frac{125x}{125} = \frac{2050}{125}$$

$$x = 16,4 \text{ minutes}$$

remplacer :

$$y = 3190 + 65 \cdot 16,4$$

$$y = 4256 \text{ litres}$$

Exemple 3 : Un filet de volley-ball est 9,5 fois plus long que large. La différence entre sa longueur et sa largeur est de 8,5 m. Trouve les dimensions de ce filet de volley-ball.

x : largeur du filet
 y : longueur du filet

$$y = 9,5x$$

$$y - x = 8,5$$

$$9,5x - x = 8,5$$

$$\frac{8,5x}{8,5} = \frac{8,5}{8,5}$$

$$x = 1 \text{ m}$$

$$y = 9,5 \cdot 1$$

$$y = 9,5 \text{ m}$$

Nombre de solutions d'un système d'équations.

- Une solution unique si on trouve une valeur à x et une valeur à y .
- Aucune solution si on obtient $0x = c$ ou $0y = c$. Car $\frac{c}{0}$ n'existe pas.
- Une infinité de solutions si on obtient $0x = 0$.